Das Geschwindigkeitsgesetz der Gasmolekeln

Von

Gustav Jäger, wirkl. Mitglied d. Akad. d. Wissensch.

(Mit 1 Textfigur)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1929)

Als Maxwell[1] sein Gesetz über die Verteilung der Geschwindigkeiten der Gasmolekeln ableitete, setzte er voraus, daß die Wahrscheinlichkeit einer Geschwindigkeitskomponente unabhängig von den anderen Komponenten sei. Dies wurde vielfach beanstandet und man verdankt in erster Linie Boltzmann[2] den Beweis für die Richtigkeit dieser Annahme. Derartige Beweise sind aber ziemlich langwieriger Natur, ja sie wurden vielfach auch wieder angegriffen. So heißt es z. B. in der „Dynamischen Theorie der Gase“ von J. H. Jeans (Übersetzer Reinhold Fürth), Braunschweig 1926, S. 73: „Der Beweis (nämlich jener von Boltzmann) muß annehmen, daß es keine Beziehungen zwischen den Geschwindigkeits- und den Lagekoordinaten gibt, während der erste Beweis (von Maxwell) bloß annimmt, daß es keine Beziehung zwischen den einzelnen Geschwindigkeitskomponenten untereinander gibt. In beiden Fällen lassen die dynamischen Bedingungen in gleicher Weise Beziehungen vermuten, bis nicht das Gegenteil bewiesen ist, und es dürfte schwer sein, einen Grund anzugeben, warum die eine Annahme betreffend das Nichtbestehen einer Beziehung gerechtfertigter sein sollte als die andere.“

Um solche Einwendungen unmöglich zu machen, habe ich auf einem ganz anderen Weg das Verteilungsgesetz abzuleiten versucht[3]. Eine Erweiterung dieses Beweises gab ich im „Handbuch der Physik“, Bd. IX, S. 375 (1926). Zweck des Folgenden ist, zu zeigen, daß man, ausgehend von der ganz allgemeinen Annahme, die Wahrscheinlichkeit einer Geschwindigkeitskomponente einer Gasmolekel zwischen u und $u + du$ sei nicht nur von u, sondern auch noch von ganz willkürlichen anderen Größen abhängig, schließlich erkennt, daß nur eine Abhängigkeit von u allein übrigbleibt.

Wir denken uns ein „molekular ungeordnetes“ Gas in einem zylindrischen Gefäß (Fig. 1), dessen Achse wir zur x-Achse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems machen. Auf das Gas wirke keine Kraft. Nur wenn eine Gasmolekel die Ebene AB passiert, soll sie einen Energiezuwachs a parallel zur x-Achse erfahren.

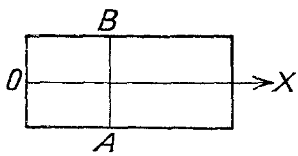

Fig. 1.

[1] Phil. Mag. (II) *19*, 1860, S. 22.

[2] Siehe z. B. Vorlesungen über Gastheorie *1*, S. 15.

[3] Siehe G. Jäger, Fortschr. d. kinet. Gastheorie, 2. Aufl., 1919, S. 67.

Wir können uns das etwa so denken, daß beim Passieren von AB auf einer sehr kleinen Strecke eine Kraft parallel zur x-Achse auf die Molekel wirkt. Wir wenden auf das Gas die hydrostatischen Grundgleichungen an. Es gilt also

$$\rho X - \frac{dp}{dx} = 0$$

usw. Es ist ρ die Dichte, X die Kraft auf die Masseneinheit des Gases, p der Gasdruck. Die Gleichung läßt sich in die Form bringen

$$\frac{dp}{\rho} = X dx = dA,$$

wenn dA die Arbeit ist, welche die Kraft X leistet, wenn die Masseneinheit des Gases den Weg dx zurücklegt. Die Integration ergibt

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{\rho} = A, \tag{1}$$

und es ist A die Arbeit, wenn die Masseneinheit des Gases beim Transport vom Druck p_0 zu p_1 übergeht.

Unser Gas befolge das B o y l e sche Gesetz $\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$. Danach läßt sich die Gleichung (1) umwandeln in

$$\frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = A,$$

was weiter ergibt

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = A \frac{\rho_0}{p_0} \text{ und } p_1 = p_0 e^{A \frac{\rho_0}{p_0}}. \tag{2}$$

Nach dem Früheren ist $A = n a$, wenn n die Zahl der Molekeln der Masseneinheit des Gases ist. Nach der bekannten Gleichung der kinetischen Gastheorie

$$p_0 v_0 = \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{n m \overline{c^2}}{3}$$

können wir bilden

$$A \frac{\rho_0}{p_0} = na . \frac{3}{n m \overline{\overline{c^2}}} = \frac{3a}{m \overline{\overline{c^2}}},$$

somit die Gleichung (2)

$$p_1 = p_0 e^{\frac{3a}{m \overline{\overline{c^2}}}}.$$

Nach der kinetischen Theorie kann nur Gleichgewicht zwischen den beiden Teilen unseres zylindrischen Gefäßes bestehen, wenn in jedem beliebigen Zeitabschnitt gleich viel Molekeln von links nach rechts wie von rechts nach links die Ebene AB passieren. Von der Verteilung der Geschwindigkeiten über die Gasmolekeln nehmen wir an, daß sie gesetzmäßig ist und daß die Wahrscheinlichkeit, daß eine Molekel eine Geschwindigkeitskomponente zwischen u und $u + du$ senkrecht zu AB besitzt, durch $\varphi\, du$ gegeben ist, wobei φ eine Funktion von u, aber auch von ganz beliebigen anderen Variabeln ist. Solche könnten etwa sein die beiden anderen Geschwindigkeitskomponenten v und w, ferner die Lagekoordinaten x, y, z der Molekeln, die Dichte ρ des Gases, der Druck p usw. Ist in der linken Seite des Gefäßes die Zahl der Molekeln in der Volumeneinheit N_0, so ist dort die Zahl der Molekeln von der eben genannten Eigenschaft $N_0 \varphi\, du$, analog rechts $N_1 \varphi\, du$. Die Zahl der Molekeln, die in der Sekunde durch die Flächeneinheit von AB von links nach rechts gehen, wird sein

$$\int_0^\infty N_0 u\, \varphi\, du = \frac{N_0 \bar{u}}{2}. \tag{I}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ergibt sich aus der Überlegung, daß von den N_0 Molekeln nur die Hälfte gegen die Ebene AB fliegt, die andere von ihr weg. Diese zählt also nicht mit. $\bar{u}$ bedeutet somit den Mittelwert aller positiven Geschwindigkeitskomponenten.

In gleicher Weise finden wir die Zahl der nach links durch AB fliegenden Molekeln. Doch haben wir dabei zu bedenken, daß nur jene Molekeln wirklich hindurchgelangen, deren kinetische Energie parallel zur x-Achse größer als die zu leistende Arbeit a ist. Es muß also $\frac{mu^2}{2} > a$ sein. Wir können somit das obige Integral (I) nicht von 0 bis ∞ nehmen, sondern nur von $u > \sqrt{\frac{2a}{m}}$ an und erhalten so

$$\int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^\infty N_1\, u\, \varphi\, du. \tag{II}$$

Zur Wahrung des Gleichgewichtes muß (I) = (II), d. h.

$$\frac{N_0 \bar{u}}{2} = \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^\infty N_1 u\, \varphi\, du$$

sein. Nach unserer Annahme kann φ auch eine Funktion von N_1 sein. Da jedoch die Integration nur nach u genommen wird, so sind alle übrigen Variablen des φ bei der Integration als konstant zu behandeln. Es kann somit N_1 auch vor das Integralzeichen gesetzt werden, so daß wir weiter bilden können

$$\frac{N_0}{N_1} = \frac{p_0}{p_1} = \frac{2}{\bar{u}} \int_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^\infty u\, \varphi\, du$$

und schließlich unter Berücksichtigung der Gleichung (2)

$$\int\limits_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty} u\,\varphi\,du = \frac{\bar{u}}{2}\,e^{-\frac{3a}{m\bar{c^2}}}$$

erhalten. Wir setzen $\sqrt{\frac{2a}{m}} = x$, das ergibt

$$\int\limits_{x}^{\infty} u\,\varphi\,du = \frac{\bar{u}}{2}\,e^{-\frac{3x^2}{2\bar{c^2}}}.$$

Es muß also $\int u\varphi du$ für $u = \infty$ den Wert 0 und $u = x$ den Wert $-\frac{\bar{u}}{2}\,e^{-\frac{3x^2}{2\bar{c^2}}}$ annehmen. Wir können somit das allgemeine Integral an

$$\int x\varphi\,dx = -\frac{\bar{u}}{2}\,e^{-\frac{3x^2}{2\bar{c^2}}}$$

bilden, dessen Differential

$$x\varphi\,dx = \frac{3\bar{u}\,x}{2\bar{c^2}}\,e^{-\frac{3x^2}{2\bar{c^2}}}\,dx$$

ist. Kürzen wir hier durch x und setzen wir für x wieder die Geschwindigkeitskomponente ein, so wird

$$\varphi\,du = \frac{3\bar{u}}{2\bar{c^2}}\,e^{-\frac{3u^2}{2\bar{c^2}}}\,du.$$

$\varphi\,du$ ist aber die Wahrscheinlichkeit einer Geschwindigkeitskomponente zwischen u und $u + du$. Ziehen wir alle Geschwindigkeitskomponenten von $-\infty$ bis $+\infty$ in Betracht, so muß demnach

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi\,du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{3\bar{u}}{2\bar{c^2}}\,e^{-\frac{3u^2}{2\bar{c^2}}}\,du = 1$$

sein. Daraus findet sich nach bekannten Rechenmethoden

$$\varphi = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}},$$

wenn wir noch $\frac{2\bar{c^2}}{3} = \alpha^2$ setzen.

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion φ tatsächlich nur abhängig von u, u. zw. in der von Maxwell zuerst aufgestellten Form.

Die Konstante α, bekanntlich die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Molekeln, ändert sich mit der Temperatur. Ihr Quadrat ist ja der absoluten Temperatur proportional.

Wir können schließlich sagen: „Die Geschwindigkeitskomponenten sind deshalb voneinander unabhängig, weil die hydrostatischen Grundgleichungen voneinander unabhängig sind. Das ist die Ursache, warum in der Lösung für φ neben u nicht noch andere Variablen auftreten, insbesondere Größen, die mit der Richtung der y- und z-Achse im Zusammenhang stehen."